均质细杆转动惯量测定及分析

罗全宇 王昆林
云南省楚雄师范学院物理与电子科学系 云南楚雄 675000

【文章摘要】
本文从研究转动惯量的角度出发,介绍了一种用简单的装置来测定均质细杆绕中心轴的转动惯量的方法。通过理论分析及实验验证,证明了此装置和实验的理论及方法是可行的。它具有理论推导严密、仪器简单、操作方便、测量结果准确等特点,值得推广。

【关键词】
双线摆,转动惯量,本体摆
中图分类号:04—33 文献标识码:B

0 引言

物体的转动惯量是研究物体转动过程中的一个重要物理量。在大学物理实验中,测量物体转动惯量的是一个基础实验,但大多是对均质圆盘的转动惯量加以测定,而对于均质的其它形状的物体涉及不多。笔者通过理论分析和实验探索,提出了一种测定均质细杆转动惯量的方法将此装置称之为双线摆。经过实验证明,此方法是可行的,能较快、较准确的测定出均质细杆的转动惯量。

1 理论分析

1.1 仪器装置

如图一所示,将长为 L 的两根相等的悬线挂在支架顶部相距为 d 的两孔上,悬线下端悬空固定一均质细杆,在支架底座与悬杆相平的位置安放一弧形角度观测器,这样就构成了一测定均质细杆转动惯量的装置——双线摆,并将摆上的杆称为本体杆,在本体杆的一端附着一质量可忽略的微型挡光针,用于配合通用的周期测定仪测定其摆动周期。

1.2 理论分析

当双线摆的本体杆处于水平状态时,在本体杆的一端施加一横向外力,使本体杆偏离原平面一个角度θ($\theta<5°$),去掉外力后,本体杆可绕中心轴作摆动。当摆到最大角度时,动能为 0,势能最大,此时受力分析如图二所示,摆所受恢复力为:

$$F=\frac{1}{2}mg\sin\theta \cdots\cdots 1$$

当双线摆摆线端点由 A 转动到 B 时,摆线的转过角度为θ,此时 B 点升高 H,B 点水平方向到摆线的距离为 BD,在高度 H 上的水平面上,过 B 点作到摆的垂直距离 BC,则有 BC//AO,而 BC 是摆由 A 转到 B 的水平夹角所对的直角边,γ 为本体杆摆到最高位置与原位置之间的夹角,因此有:

$$BD=L\cdot\sin\vartheta \quad BC=\frac{d}{2}\sin\gamma$$

$$BC\approx BD$$

当 θ、γ 角变小时, $\sin\theta\approx\theta$ $\sin\gamma\approx\gamma$

$\therefore L\theta=\dfrac{d}{2}\gamma$ 将 θ 值代入 1 式中有:

$$F=\frac{mg\cdot d}{4L}$$

恢复力矩

$$M=-\frac{mg\cdot d^2}{4L}\cdot\theta=J\cdot\theta''$$

即:$\theta''+\dfrac{mg\cdot d^2}{4L\cdot J}\theta=0$

此式表明本体杆的摆动是简谐振动其振动的圆频率为:

$$w_0^{\ 2}=\frac{mg\cdot d^2}{4L\cdot J}\cdots\cdots 2$$

又 $w_0=\dfrac{2\pi}{T}\cdots\cdots 3$

联立 2、3 两式得:

$$J=\frac{mg\cdot d^2}{16\pi^2\cdot L}\cdot T^2\cdots\cdots 4$$

此式为本体杆的转动惯量的测量公式,其中 T 为本体杆摆动的周期由周期测定仪测出。若给双线摆的本体杆上附加一质量为 m_1 的待测圆柱体细棒,则混合体的转动惯量是:

$$J_1=\frac{(m_1+m)g\cdot d^2}{16\pi^2\cdot L}\cdot T_1^2\cdots\cdots 5$$

通过周期测定仪测定出周期 T_1,代人 5 式计算出 J_1,即可求出待测细棒的转动惯量

$$J=J_1-J_0=\frac{(m_1+m)g\cdot d^2}{16\pi^2\cdot L}\cdot T_1^2-\frac{mg\cdot d^2}{16\pi^2\cdot L}\cdot T^2=\frac{gd^2}{16\pi^2L}\left[(m_1+m)T_1^2-mT^2\right]$$

从力学理论可知,均质圆柱体绕中心轴的转动惯量为:$J_{理}=\dfrac{m\cdot r^2}{4}+\dfrac{m\cdot l^2}{12}$

2 实验探究

d/cm	L/cm	l/cm	T (s)					J (10^{-4}kg·m^2)	
			T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	J	$J_{理}$
18.00	37.50	20.00	0.869	0.872	0.875	0.876	0.877	8.166	8.232

表 1:测定质量为 m_0=200.00g 半径为 r=0.643cm 的本体杆的转动惯量数据

d/cm	L/cm	l/cm	T (S)					J (10^{-4}kg·m^2)	
			T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	J	$J_{理}$
18.00	37.50	20.00	0.840	0.843	0.843	0.844	0.845	4.560	4.58

表 2: 测定在本体摆上固定一质量为 m_1=135.00g 半径为 r=0.494cm 的圆柱细棒的转动惯量数据

d/cm	L/cm	l/cm	T (s)					J (10^{-4}kg·m^2)	
			T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	J	$J_{理}$
18.00	37.50	20.00	0.850	0.851	0.852	0.852	0.852	3.066	3.010

表 3: 测量在本体摆上固定一质量为 m_2=90.30g 半径为 r=0.402cm 的圆柱细棒的转动惯量数据

d/cm	L/cm	l/cm	T (s)					J (10^{-4}kg·m^2)	
			T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	J	$J_{理}$
18.00	37.50	20.00	0.859	0.860	0.861	0.862	0.862	1.946	1.934

表 4: 测量在空摆上固定一质量为 m_3=55.20g 半径为 r=0.304cm 的圆柱细棒的转动惯量数据

2.1 测定质量为 m_0=200.00g 半径为 r=0.643cm 的本体杆绕中心轴的转动惯量，实验数据见表 1

$$\bar{T}=\frac{\sum T}{n}=\frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{5}=0.874s$$

$$J=\frac{m_0gd^2}{16\pi^2L}\bar{T}^2=8.166\times10^{-4}(kg\cdot m^2)$$

$$J_{理}=\frac{m_0r^2}{4}+\frac{m_0l^2}{12}=8.232\times10^{-4}(kg\cdot m^2)$$

$$u_m=0.1g \quad u_A=0, u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.058cm$$

$$u_{A(T)_0}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{T}-T_i)}{n(n-1)}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{T}-T_i)^2}{4\times5}}=0.1466\times10^{-3}s$$

$$u_d=\sqrt{(u_{A(d)})^2+(u_{B(d)})^2}=0.06cm$$

$$u_L=\sqrt{(u_{A(L)})^2+(u_{B(L)})^2}=0.06cm$$

$$u_l=\sqrt{(u_{A(l)})^2+(u_{B(l)})^2}=0.06cm$$

测定本体杆转动惯量的相对不确定度

$$u_J=\sqrt{(\frac{u_{m_0}}{m})^2+4(\frac{u_d}{d})^2+(\frac{u_L}{L})^2+4(\frac{u_T}{T})^2}=0.862\%$$

测定本体杆转动惯量的不确定度为

$$U=J\times u_J=8.166\times10^{-4}\times0.862\%=0.000007kgm^2$$

测量结果为

$$J=(8.17\pm0.07)\times10^{-4}kgm^2$$

将理论值视为真实值与实验测量值对比，确定其相对误差

相对误差为

$$E=\left|\frac{J_{理}-J_{测}}{J_{理}}\right|\times100\%=0.802\%$$

2.2 在本体杆上附加一质量为 m_1=135.00g 半径为 r=0.494cm 的圆柱体细棒，进行实验，测定其转动惯量，实验记录见表 2.

$$\bar{T}=\frac{\sum T}{n}=\frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{5}=0.843s$$

$$J=\frac{(m_0+m_1)gd^2}{16\pi^2L}\bar{T}^2=12.726\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{测}=J-J_0=(12\cdot726-8\cdot166)\times10^{-4}=4\cdot56\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{理}=\frac{m_0r^2}{4}+\frac{m_0l^2}{12}=4.580\times10^{-4}kgm^2$$

测定质量为 m_1 的均质细棒转动惯量的相对不确定度

$$u_J=\sqrt{(\frac{u_{m_0}}{m})^2+4(\frac{u_d}{d})^2+(\frac{u_L}{L})^2+4(\frac{u_T}{T})^2}=0.862\%$$

测定质量为 m1 的均质细棒转动惯量的不确定度为

$$U=J\times u_J=4.56\times10^{-4}\times0.862\%=0.000007kgm^2$$

测量结果为

$$J=(4.56\pm0.07)\times10^{-4}kgm^2$$

相对误差为

$$E=\left|\frac{J_{理}-J_{测}}{J_{理}}\right|\times100\%=0.437\%$$

2.3 在本体杆上附加一质量为 m_2=90.30g 半径为 r=0.402cm 的圆柱体细棒，进行实验，测定其转动惯量，实验记录见表 3.

$$\bar{T}=\frac{\sum T}{n}=\frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{5}=0.851s$$

$$J=\frac{(m_0+m_1)gd^2}{16\pi^2L}\bar{T}^2=11.232\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{测}=J-J_0=11\cdot232-8\cdot166=3\cdot066\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{理}=\frac{m_0r^2}{4}+\frac{m_0l^2}{12}=3.010\times10^{-4}kgm^2$$

测定质量为 m2 的均质细棒转动惯量

$$u_J=\sqrt{(\frac{u_{m_0}}{m})^2+4(\frac{u_d}{d})^2+(\frac{u_L}{L})^2+4(\frac{u_T}{T})^2}=0.862\%$$

测定质量为 m_2 的均质细棒转动惯量的不确定度为

$$U=J\times u_J=3.066\times10^{-4}\times0.862\%=0.000003kgm^2$$

测量结果为 $J=(1.95\pm0.02)\times10^{-4}kgm^2$

相对误差为

$$E=\left|\frac{J_{理}-J_{测}}{J_{理}}\right|\times100\%=0.620\%$$

2.4 在本体杆上附加一质量为 m_3=55.20g 半径为 r=0.304cm 的圆柱体细棒，进行实验，测定其转动惯量，实验记录见表 4.

$$\bar{T}=\frac{\sum T}{n}=\frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}{5}=0.861s$$

$$J=\frac{(m_0+m_1)gd^2}{16\pi^2L}\bar{T}^2=10.112\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{测}=J-J_0=(10\cdot112-8\cdot166)=1.946\times10^{-4}kgm^2$$

$$J_{理}=\frac{m_0r^2}{4}+\frac{m_0l^2}{12}=1.934\times10^{-4}kgm^2$$

测定质量为 m_3 的均质细棒转动惯量的相对不确定度

$$u_J=\sqrt{(\frac{u_{m_0}}{m})^2+4(\frac{u_d}{d})^2+(\frac{u_L}{L})^2+4(\frac{u_T}{T})^2}=0.862\%$$

测定质量为 m3 的均质细棒转动惯量的不确定度为

$$U=J\times u_J=1.946\times10^{-4}\times0.862\%=0.000002kgm^2$$

测量结果为

$$J=(1.95\pm0.02)\times10^{-4}kgm^2$$

论值比较相对误差为

$$E=\left|\frac{J_{理}-J_{测}}{J_{理}}\right|\times100\%=0.620\%$$

3 结束语

由以上理论分析及实验数据可知，用双线摆测量均质细杆的转动惯量在误差允许范围内是可行的，而且具有理论清晰、结构简单、操作性较强等特点。适用于大学物理实验教学，值得推广。

【参考文献】

[1] 冯旺军，测定刚体转动惯量的一种准确方便的方法，甘肃教育学院学报，2001.10，

[2] 陈春天，刚体转动惯量测量的改进，物理实验，1992.6，245—246

[3] 杨述武主编．普通物理实验(一．力学及热学部分)[M] 北京．高等教育出版社，2000

[4] 白泽生等大学物理实验(第二版)[M] 西安．陕西人民出版社，2006

[5] 邱菊等．用扭摆验证转动惯量平行轴定理的新办法[J] 大学物理，2006

[6] 龚镇雄．普通物理实验中的数据处理[M] 西安．西北电讯工科学院出版社，1985

[7] 漆安慎、杜婵英．力学基础[M] 高等教育出版社，1987.

[8] 刘竹琴，用最小二乘法验证转动惯量平行轴定理，大学物理实验，2007

》接 172 页

社 2013 年 3 月

[2] 马玉玲，郑淑媛，大学英语新理念综合教程，第 1 册，北京出版社 2008.12

[3] 马玉玲，郑淑媛，大学英语新理念综合教程综合实训，第 1 册 北京出版社 2008.12

[4] 马玉玲，郑淑媛，大学英语新理念综合教程，第 2 册，北京出版社 2008.12

[5] 马玉玲，郑淑媛，大学英语新理念综合教程综合实训，第 2 册，北京出版社 2008.12

【作者简介】

戴倩，1986，女，黄石，本科，助教，黄石职业技术学院公共课部，研究方向：英语教育。